Гидравлика и инженерная гидрология

Научная статья
https://doi.org/10.26897/1997-6011-2025-3-69-76
УДК 551.482.215

СРАВНИТЕЛЬНЫЙ АНАЛИЗ РАЗЛИЧНЫХ МОДЕЛЕЙ ОСЦИЛЛЯЦИЙ СВОБОДНОЙ ПОВЕРХНОСТИ ВОДНОГО ПОТОКА

В.А. Фартуков✉, М.И. Зборовская
Федеральное государственное бюджетное учреждение высшего образования «Российский государственный аграрный университет – МСХА имени К.А. Тимирязева», Институт мелиорации, водного хозяйства и строительства имени А.Н. Костякова; 127434, г. Москва, ул. Тимирязевская, 49, Россия

Аннотация. Исследования посвящены сравнительному анализу различных моделей осцилляций свободной поверхности жидкости с акцентом на автоколебательные процессы. Основная цель исследований заключается в сравнительном анализе различных моделей, описывающих осцилляции свободной поверхности жидкости. Осцилляции водных потоков представляют собой сложные колебания, возникающие под влиянием разнообразных факторов – таких, как атмосферные условия и гравитационные силы. В исследованиях рассматриваются основные характеристики осцилляций включая частоту, амплитуду и длину волны, а также важность нелинейных сил и механизмов обратной связи для возникновения автоколебаний. Для анализа используемых расчетных моделей и подходов применяются аналитические методы, что позволяет получить более точные результаты для различных параметров автоколебательного движения открытых водных потоков. Результаты исследований могут послужить основой при дальнейшем изучении динамики водных сред и разработке более эффективных управленческих стратегий для использования водных ресурсов.

Ключевые слова: осцилляции, свободная поверхность жидкости, автоколебания, водные потоки, динамика, гравитационные силы, волны

Формат цитирования: Фартуков В.А., Зборовская М.И. Сравнительный анализ различных моделей осцилляций свободной поверхности водного потока // Природообустройство. 2025. № 3. С. 69-76. https://doi.org/10.26897/1997-6011-2025-3-69-76

Scientific article

COMPARATIVE ANALYSIS OF DIFFERENT MODELS OF FREE SURFACE OSCILLATIONS OF WATER FLOW

V.A. Fartukov✉, M.I. Zborovskaya
Federal State Budgetary Institution of Higher Education Russian State Agrarian University – Moscow Timiryazev Agricultural Academy, A.N. Kostyakov Institute of Land Reclamation, Water Management and Construction, 49 Timiryazevskaya str., Moscow, 127434, Russia

Abstract. This study is devoted to a comparative analysis of various models of oscillations of the free surface of a liquid with an emphasis on self-oscillatory processes. The main purpose of the study is to evaluate the accuracy, applicability and effectiveness of these models for solving specific tasks. Water flow oscillations are complex fluctuations that occur under the influence of various factors, such as atmospheric conditions and gravitational forces. The study examines the main characteristics of oscillations, including frequency, amplitude, and wavelength, as well as the importance of nonlinear forces and feedback mechanisms for the occurrence of self-oscillations. Analytical methods are used to analyze the calculation models and approaches used, which makes it possible to obtain more accurate results for various parameters of the self-oscillatory motion of open water streams. This work can serve as a basis for further study of the dynamics of aquatic environments and the development of more effective management strategies for the use of water resources.

Keywords: oscillations, free surface of a liquid, self-oscillations, water flows, dynamics, gravitational forces, waves

Format of citation: Fartukov V.A., Zborovskaya M.I. Comparative analysis of different models of free surface oscillations of water flow // Prirodoobustrojstvo. 2025. № 3. P. 69-76. https://doi.org/10.26897/1997-6011-2025-3-69-76

Введение. Осцилляции свободной поверхности водных потоков являют собой сложные колебательные процессы, возникающие под воздействием разнообразных факторов – таких, как ветер, изменения атмосферного давления, осадки и гравитационные силы. Эти колебания могут проявляться в виде волн, ряби и более сложных форм движения, затрагивая как физику жидкости, так и динамику окружающей среды. Основные характеристики осцилляций – такие, как частота, амплитуда и длина волны, являются критически важными для понимания поведения водных систем. Примерами задач для анализа могут быть осцилляции в замкнутых водоемах (сейши), волны на поверхности океана (ветровые волны, приливные волны), колебания в реках и каналах (автоколебания, волны от судов), взаимодействие волн с препятствиями (например, волноломами или береговой линией, водосбросами) [1]. При этом не ослабевает интерес к аналитическим методам. Это связано с тем, что аналитические методы позволяют оценить качественное поведение изучаемого объекта, вскрыть его основные особенности, не прибегая к многочисленным вычислениям. Кроме того, аналитические решения часто служат единственным обоснованием применимости того или иного численного алгоритма [2]. Такой анализ позволяет выбрать наиболее подходящую модель для определенных условий, а также выявить ее ограничения и преимущества.

Особый вид осцилляций – осцилляции свободной поверхности жидкости, связанные с автоколебаниями, которые представляют собой процесс, когда динамическая система начинает колебаться самостоятельно, без постоянного внешнего воздействия. Этот эффект часто возникает благодаря сбалансированному взаимодействию нелинейных сил, механизмов обратной связи и демпфирования, что ведет к формированию устойчивого уровня колебаний и энергии внутри системы.

Условия, необходимые для возникновения автоколебаний, – наличие нелинейных сил и обратных связей, а также характеристик, обеспечивающих затухание (таких, как сила трения и демпфирование). Эти факторы позволяют системе поддерживать постоянный уровень энергии и осуществлять колебательные движения.

Для изучения характеристик автоколебательного движения открытых водных потоков применяются различные расчетные модели и методики. В их основе лежат приближенные численные методы, необходимые для получения точных результатов расчетов параметров автоколебательного режима течения в открытых водных потоках и определения характеристик. Анализ существующих моделей и методик является ключевым для дальнейшего понимания сложного процесса.

Цель исследований: сравнительный анализ различных моделей, описывающих осцилляции свободной поверхности жидкости; систематизация и анализ имеющихся данных исследований для более детального понимания процессов осцилляции жидкости в различных расчетных областях гидротехники.

При достижении поставленной цели акцент сделан: 1) на определении специфических характеристик различных моделей – таких, как точность, применимость и пределы; 2) на оценке влияния различных факторов включая нелинейные силы, демпфирование и обратные связи (на динамику осцилляций); 3) на определении метода и методики аналитического решения уравнения, описывающих автоколебательный режим течения открытых водных потоках; 4) на определении зависимости амплитуды колебания от параметров системы методом малого параметра [3-6].

Материалы и методы исследований. Исследования включают в себя обширный набор теоретических и численных подходов для определения характеристик автоколебательного движения на открытых водных потоках.

1. Описание исследуемой системы. Исследовательская работа сосредоточена на осцилляциях свободной поверхности воды, которые обусловлены влиянием различных факторов: ветер, изменения давления, осадки, гравитационные силы и др. Эффекты этих факторов приводят к образованию волн, ряби и другим формам динамического поведения жидкости, что требует анализа характеристик осцилляций – таких, как частота, амплитуда и длина волны.

2. Подходы к теоретическому анализу. Для анализа автоколебаний и осцилляций было разработано несколько расчетных моделей. В рамках исследований использовались следующие подходы:

2.1. Метод малого параметра, позволяющий упростить уравнения, описывающие динамику системы, за счет введения малых параметров. Это позволяет проводить анализ в приближенных условиях, что значительно облегчает решение сложных уравнений.

2.2. Интегрирующий множитель. Метод применяется для решения дифференциальных уравнений и позволяет находить аналитические решения для автономных систем. Использование интегрирующих множителей помогает упрощать уравнения и находить кривые состояния системы.

2.3. Комплексный подход. Использование комплексных переменных позволяет формулировать осцилляции в более удобном виде. Переход к комплексному виду уравнений способствует более эффективной обработке и анализу динамических систем.

Методы составляют основную структуру исследований и позволяют более глубоко понять взаимосвязи различных динамических процессов, которые наблюдаются в открытых водных потоках. Каждый из упомянутых методов требует тщательной настройки и адаптации к конкретным условиям, что подчеркивает сложность и многообразие изучаемых явлений.

Результаты и их обсуждение. Расчет автоколебательного режима и определение зависимости амплитуды колебания от параметров системы и времени произвели методом малого параметра с применением методов: 1) интегрирующего множителя; 2) перехода к комплексному виду.

Для анализа методов расчета автоколебательного режима течения необходимо определить нелинейные силы, установить обратную связь и затухающие силы. Нелинейные силы играют ключевую роль в сложных динамических системах. В отличие от линейных систем, где силы пропорциональны отклонению от равновесия, в нелинейных системах такое соотношение может быть более сложным. Обратная связь представляет собой процесс, в котором выходные данные системы влияют на ее дальнейшее поведение. В автоколебаниях существует положительная и отрицательная обратная связь: положительная увеличивает амплитуду колебаний, отрицательная способствует стабилизации и может привести к колебаниям.

Затухающие силы, сила трения или демпфирование препятствуют возникновению автоколебаний. Однако если затухание сбалансировано с источником энергии, то система может поддерживать постоянный уровень энергии. Для возникновения автоколебаний должны выполняться следующие условия: наличие нелинейных сил, которые могут создавать дополнительные энергии, достаточные для компенсации затухания; выходная обратная связь, создающая цикл обращения энергии в систему. Затухающие характеристики – такие, как сила трения, управляют энергией внутри системы, но недостаточны для ее остановки.

Методы исследований. 1. Метод расчета автоколебательного режима и определение зависимости амплитуды колебания от параметров системы и времени методом малого параметра с применением интегрирующего множителя позволяют производить приближенные расчеты для уравнений, содержащих малые параметры, что является важным при расчете автоколебаний.

Уравнение движения имеет следующий вид:

$$\frac{md^2x}{dt^2} + kx + \epsilon x^3 = 0, \tag{1}$$

где m – масса; k – жесткость; ϵ – малый параметр; x – отклонение от равновесия.

Методика расчета представляет собой изложенную ниже последовательность.

Редукция уравнения. Вводится понятие ϵ – малый параметр, $\epsilon \to 0$. Разделим переменные входящие в уравнение (1) на линейную и нелинейную части:

$$\frac{md^2x}{dt^2} + kx \approx 0. \tag{2}$$

Решение этого линейного уравнения –

$$x(t) = A\cos(\omega_0 t + \varphi,) \tag{3}$$

где $\omega_0 = \sqrt{\dfrac{k}{m}}$ – собственная частота; A – амплитуда; φ – фаза.

Введение нелинейного члена. Введем малый параметр ϵ в уравнение. С учетом рассмотренной малости можно считать, что величина x^3 может быть принята за малый параметр, и это позволит разложить уравнение (3) в ряд Тейлора:

$$x^3 = (A\cos(\omega_0 t + \varphi))^3 = A^3\cos^3(\omega_0 t + \varphi). \tag{4}$$

Применим тригонометрическую формулу:

$$\cos^3(\theta) = \frac{1}{4}\cdot\cos(3\theta) + \frac{3}{4}\cos(\theta). \tag{5}$$

Таким образом, получим:

$$x^3 = \frac{A^3}{4\cdot\cos(3(\omega_0 t + \varphi))} + \frac{3A^3}{4\cdot\cos(\omega_0 t + \varphi)}. \tag{6}$$

Подставим выражение x^3 уравнения (6) в уравнение (1):

$$\frac{md^2x}{dt^2} + kx + \epsilon\cdot\left(\frac{A^3}{4\cdot\cos(3(\omega_0 t+\varphi))} + \frac{3A^3}{4\cdot\cos(\omega_0 t+\varphi)}\right) = 0. \tag{7}$$

Линеаризация уравнения. При малом параметре ϵ производим линейное приближение, рассматривая только слагаемые уравнения первого порядка:

$$\frac{md^2x}{dt^2} + kx + \frac{3\epsilon A^3}{4\cos(\omega_0 t + \varphi)} \approx 0. \tag{8}$$

Решение уравнения с учетом возмущения. Перенесем левую часть выражения (8):

$$\frac{md^2x}{dt^2} + kx = -\frac{3\epsilon A^3}{4\cos(\omega_0 t + \varphi)}. \quad (9)$$

Полученное уравнение можно решить методом вариации постоянных на определение устойчивости обобщенным методом Гринса [7, 8]. Окончательное аналитическое решение уравнения (9) является сложным.

Рассмотрим метод решения методом интегрирующего множителя. В результате решения получим выражение, которое определит зависимость амплитуды колебаний от параметров системы с учетом нелинейного члена, а также анализ параметров устойчивости и определение увеличение амплитуды или частоты.

Аналитическое решение с использованием метода интегрирующего множителя. Приведем уравнение (1) к стандартному виду. Разделим обе стороны на массу m:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{k}{mx} + \frac{\epsilon}{mx^3} = 0. \quad (10)$$

Определим: $\omega_0^2 = \frac{k}{m}$ и $\alpha = \frac{\epsilon}{m}$.

Получим: $\frac{dx^2}{dt^2} + \omega_0^2 x + \alpha x^3 = 0.$ (11)

Полученное уравнение второго порядка преобразуем в систему первого порядка. Для этого введем новую переменную: $v = \frac{dx}{dt}$. Получили систему уравнений $\frac{dx}{dt} = v$:

$$\frac{dv}{dt} = -\omega_0^2 x - \alpha x^3. \quad (12)$$

Решение выполняем методом интегрирующего множителя. Для этого начнем с уравнения для v: $\frac{dv}{dt} + \omega_0^2 x + \alpha x^3 = 0.$

Выразим v через x, зависящее от независимой переменной времени t.

Интегрирующий множитель $\mu(t)$ будет равен $e^{\int \omega_0 2dt}$.

Умножаем уравнение (12) на интегрирующий множитель:

$$e^{\omega_0 2t}\frac{dv}{dt} + \omega_0^{2e\omega_0} 2^t x = -\alpha e^{\omega_0^{2t}} x^3.$$

Перепишем уравнение как производную от произведения, получим:

$$\frac{d\left(e^{\omega_0^{2t}} v\right)}{dt} = -\alpha e^{\omega_0^{2t}} x^{3.}$$

Проинтегрируем обе стороны уравнения по времени:

$$e^{\omega_0^{2t}} v = -\alpha \int e^{\omega_0^{2t}} x^3 dt + C,$$

$e^{\omega 02t}v = -\alpha\int e^{\omega}{}_0{}^{2t}x^3dt + C$, где C – константа интегрирования.

Произведем замену переменных, введем переменное время $\tau = \omega_0 \cdot t$.

Тогда $\frac{dx}{d\tau} = \frac{dx}{dt} \cdot \frac{dt}{d\tau} = \frac{1}{\omega_0 v}$.

Получили преобразованное уравнение, которое позволяет получить решение. В результате имеем комплексную форму решения, которая может быть выражена через эллиптические интегралы. Необходимо заметить, что при больших значениях амплитуды возникают колебания типа Ферми-Процедуро [9-11]:

$$x(t) \approx A\cos(\omega_0 t + \varphi) + O(\epsilon),$$

где $O(\epsilon)$ – поправка мощности нелинейного члена малого параметра ϵ.

Метод интегрирующего множителя предоставляет системный подход по определению динамики автоколебательной системы, однако для нахождения точного решения в случае сложных нелинейных членов необходимы дополнительные численные методы расчетов.

2. Метод расчета автоколебательного режима и определение зависимости амплитуды колебания от параметров системы и времени методом малого параметра с переходом к комплексному виду [12, 13]

Рассмотрим уравнение второго порядка (11). Произведем разложение по малому параметру ϵ:

$$x(t) = x_0(t) + \epsilon + O(\epsilon^2),$$

где $x_0(t)$ – решение линейного уравнения; $x_1(t)$ – корректировка, вызванная нелинейным членом.

Решение линейного уравнения $\frac{d^2x_0}{dt^2} + \omega_0^2 x_0 = 0$ можно записать как

$$x_0(t) = A\cos(\omega_0 t + \varphi),$$

где A – амплитуда; φ – начальная фаза.

Нелинейные поправки. Подставим $x_0(t)$ в уравнение и определим $x_1(t)$:

$$\frac{d^2x_1}{dt^2}(A\cos(\omega_0 t + \varphi) + \epsilon x_1(t)) + \omega_0^2(A\cos(\omega_0 t + \varphi) +$$

$$+\epsilon x_1(t)) + \int(A\cos\omega_0 t + \varphi))^3 = 0.$$

Соберем все члены по порядкам малости.

Для $O(1)$: Линейное уравнение.

Для $O(\epsilon)$: получаем уравнение для

$$x_1: \frac{d^2x_1}{dt^2} + \omega_0^2 x_1 = -\frac{1}{4}A^3\cos^3(\omega_0 t + \varphi).$$

Подставив $\cos^3$ через формулы приведения, получаем:

$$\cos^3(\omega_0 t+\varphi)=\frac{3}{4}\cos(\omega_0 t+\varphi)+\frac{1}{4}\cos(3(\omega_0 t+\varphi)).$$

Тогда решением этого уравнения для x_1 является сумма общего решения линейного уравнения и частного решения.

Общее решение $x_1, h: x_1, h(t)=B\cos(\omega_0 t+\psi)$.

Частное решение x_1, p: частное решение получится при применении метода вариации постоянных или метода определенных коэффициентов.

Решаем систему для $\varphi=0$. Комплексный вид решения. Чтобы перейти к комплексной форме решения, представим решение следующим образом.

Определим: $x(t)=Ae^{i(\omega_0 t+\varphi)}+Ae^{-i(\omega_0 t+\varphi)},$

где A – комплексное сопряжение.

Используя форму наложения (с учетом корректировок нелинейного члена), получаем:

$$x(t)=Ae^{i\omega_0 t}+Ae^{-i\omega_0 t}+O(\epsilon).$$

Таким образом, окончательное аналитическое решение для нелинейного осциллятора в комплексной форме будет иметь вид:

$$x(t)=Ae^{i\omega_0 t}+Ae^{-i\omega_0 t}+\epsilon\left(Be^{i\omega_0 t}+Be^{-i\omega_0 t}\right)+O\left(\epsilon^2\right).$$

При этом B – коэффициент, который нужно найти из уравнения для x_1, учитывая резонансные явления, которые могут возникнуть из-за нелинейных свойств системы.

Полученное уравнение для корректирующей функции $x_1(t)$ представляет однородное уравнение с учетом воздействия внешних сил:

$$\frac{d^2x_1}{dt^2}+\omega_0^2 x_1=-\frac{1}{4}A^3\left(\frac{3}{4}\cos(\omega_0 t+\varphi)+\frac{1}{4}\cos(3(\omega_0 t+\varphi))\right).$$

Его решение выполним методом вариации:

$$x_1 h(t)=C_1\cos(\omega_0 t)+C_2\sin(\omega_0 t),$$

где C_1 и C_2 – постоянные интегрирования.

Для нахождения частного решения $x_1 p(t)$ используем метод подбора. Поскольку есть два члена в правой части (с частотами ω_0 и $3\omega_0$), можем предположить, что частное решение имеет следующую форму:

$$x_1 p(t)=B\cos(\omega_0 t+\varphi)+D cos(3(\omega_0 t+\varphi)).$$

Подставляя это выражение в уравнение и сравнивая коэффициенты перед косинусами, получаем:

1. Для члена с $\cos(\omega_0 t+\varphi)$:

$$-\omega_0^2 B=-\frac{3}{16}A^3 \Rightarrow B=\frac{3}{16}\omega_0^2 A^3.$$

2. Для члена с $\cos(3(\omega_0 t+\varphi))$:

$$-\omega_0^2 D=-\frac{1}{16}A^3 \Rightarrow D=\frac{1}{16}\omega_0^2 A^3.$$

Полное решение. При объединении всех частей общее решение будет иметь следующий вид:

$$x(t)=x_0(t)+\epsilon x_1(t)A\cos(\omega_0 t+\varphi)+$$
$$+\epsilon\left(\frac{3}{16}\omega_0^2 A^3\cos(\omega_0 t+\varphi)+\frac{1}{16}\omega_0^2 A^3 cos(3(\omega_0 t+\varphi))\right).$$

Это выражение может быть упрощено и переписано как

$$x(t)=A\cos(\omega_0 t+\varphi)\cdot\left(1+\frac{3}{16}\omega_0^2\epsilon A^2\right)+\frac{1}{16}\omega_0^2\epsilon A^3 cos(3(\omega_0 t+\varphi)).$$

Анализ полученного решения. Решение показывает, что эффект нелинейности приводит к модификации амплитуды основной гармоники и появлению третьей гармоники. Это явление распространено в системах, подверженных нелинейным взаимодействиям.

Полученное решение описывает изменение амплитуды осцилляций в зависимости от параметра ϵ и начальных условий. Решение также указывает на возможность генерации гармоник, что является характерным признаком нелинейных процессов.

Таким образом, при увеличении ϵ и амплитуды A система будет демонстрировать более сложное поведение включая неустойчивость и переходные процессы.

Результаты анализа применимы к примеру расчета автоколебательного режима течения открытого водного потока. Рассмотрим автоколебательный режим в открытом водном потоке, используя метод малого параметра с применением метода перехода к комплексному виду. В этих целях рассмотрим один из типов автоколебаний, связанных с колебаниями уровня воды в реке или канале с сужением русла.

Исходная модель. Для описания течения воды в открытом канале используем уравнение Навье-Стокса и уравнение неразрывности. Для упрощения анализа ограничимся одним пространственным направлением и примем, что движение воды является однородным, со средней скоростью течения. Распишем основные уравнения.

Уравнение неразрывности:

$$\frac{\partial h}{\partial t}+\frac{\partial q}{\partial x}=0,$$

где h – уровень воды q – расход воды, который в общем случае выражается как $q=A(h)\cdot v$, где A – площадь поперечного сечения, v – скорость.

Уравнение движения (уравнение Бернулли) представим в виде:

$$\frac{\partial v}{\partial x}+g\frac{\partial h}{\partial x}=0,$$

где g – ускорение свободного падения.

Переход к сужению русла. Рассмотрим участок канала с сужением. При сужении русло уменьшается, что приводит к повышению скорости течения воды в этом участке. Мы можем описать сужение через изменение площади:

$$A(h)=A_0\left(1-k\cdot(h-h_0)^2\right),$$

где k – малый параметр; h_0 – средний уровень воды A_0– площадь поперечного сечения до сужения.

Запись уравнений в комплексном виде. Для дальнейшего анализа сделаем предположение о малом параметре (например, ϵ для отображения отклонений от устойчивого режима). Тогда перепишем переменные в комплексной форме:

$$h(t)=h_0+\epsilon He^{i\omega t},$$

где H – комплексная амплитуда колебаний; ω – угловая частота колебаний.

Подставляя это выражение в уравнения и учитывая, что в стационарном состоянии $\frac{\partial h}{\partial t}=0$, можно рассмотреть изменения уровня воды в малом параметре:

$$\frac{\partial h}{\partial t}\approx\epsilon i\omega He^{i\omega t}.$$

После подстановки в уравнения переходим к комплексному виду.

Переход к линейной системе. При малом отклонении от стационарного состояния получаем линейную систему:

$$\epsilon\frac{d^2H}{dt^2}+\left(g\frac{\partial h}{\partial x}\right)H=0.$$

Представляя уровень воды и водный поток в виде гармонических функций, получаем характерное уравнение, описывающее систему автоколебаний. Положим, что $\frac{\partial h}{\partial x}\approx\epsilon He^{i\omega t}$ с учетом свойств потока и уравнений Бернулли.

Анализ устойчивости. На этом этапе рассматриваем собственные значения системы с помощью метода малых параметров, определяя условия для возникновения автоколебаний. Для получения устойчивого автоколебательного режима исследуем характеристическое уравнение:

$$\epsilon\omega^2+g(\alpha H)=0,$$

где α – коэффициент, определяющий сужение.

Условия автоколебаний. Для существования автоколебаний необходима положительная область параметра, то есть $1-g\frac{H}{(\omega^2\cdot\alpha)}=0.$

Таким образом, применяя методы малого параметра и комплексного вида, можно описать автоколебания в открытом водном потоке с учетом сужения русла. Полученные уравнения могут быть использованы для дальнейшего анализа устойчивости гидравлического режима.

Рассмотрим конкретный пример автоколебательного режима в открытом водном потоке с сужением русла как с одним из измененных внешних факторов с применением метода малого параметра. Будем учитывать влияние сужения на уровень воды в русле и колебания потока, применяя метод интегрирующего множителя для решения уравнений динамики течения.

Условия задачи. Предполагаем, что в прямолинейном открытом канале (ширина b, длина L) имеется участок сужения. Этот участок и уровень воды h могут изменяться в зависимости от времени. Ширина сужения равна b_s. Уровень воды в канале описывается уравнением неразрывности и уравнением Бернулли.

Уравнения динамики. Запишем уравнение неразрывности:

$$\frac{\partial h}{\partial t}+\frac{\partial q}{\partial x}=0,$$

где $q=A(h)\cdot v$ – расход воды.

Дополним уравнение Бернулли: $\frac{dh}{dt}+\frac{g}{A(h)}\frac{dA(h)}{dt}=0.$

При малом параметре ϵ уровень колебаний запишется как

$$h(t)=h_0+\epsilon He^{i\omega t},$$

где H – амплитуда колебаний; h_0 – среднее значение.

Площадь поперечного сечения. Рассмотрим сужение, которое влияет на площадь поперечного сечения: $As(h)=b_s\cdot h$ для суженного участка.

Уравнение движения. Среднее значение:

$$\frac{d^2h}{dx^2}+\frac{g}{A(h)}\frac{Asdh}{dt}=0.$$

Применим метод интегрирующего множителя. Для этого предполагаем, что $\mu(t)=e^{\int\frac{g}{A(h)}dt}$. Умножая на $\mu(t)$ и рассматривая асимптотику, получаем: $\mu(t)\frac{dh}{dt}+\frac{gh}{A(h)}=0.$

После подстановки и получения дифференциального уравнения получим:

$$\frac{d(\mu(t)h)}{dt}=-g\frac{\mu(t)h}{A(h)}.$$

Решение полученного уравнения. После упрощения уравнения, подставляя в него выражение для $A(h)$ и разделив переменные и интегрировав, можно найти выражение колебания уровня воды в зависимости от времени:

$$\int \frac{1}{h} dh = -g \int \frac{1}{A(h)} dt.$$

Интегрируем от начального условия $h(0) = h_0$ до развития колебаний $H(t)$. Получим общее решение. Используя условия на границах, вычислим динамику колебаний, то есть зависимость уровня воды от времени, и уравнение для анализа устойчивости.

Таким образом, с помощью метода малого параметра и интегрирующего множителя можно эффективно проанализировать автоколебательный режим в открытом потоке с учетом сужения русла, что позволит определить динамику уровня воды и его изменения во времени в условиях сужающегося потока.

Выводы

Анализ различных моделей осцилляций свободной поверхности жидкости позволяет прийти к нескольким ключевым выводам.

Многообразие моделей. Существует множество моделей, описывающих осцилляции, каждая из которых имеет свои характеристики и области применения. Это подчеркивает сложность явления и необходимость использования комплексного подхода для точного описания динамики.

Влияние нелинейных сил и обратной связи. Нелинейные силы и механизмы обратной связи играют важную роль в формировании и поддержании автоколебаний. Эти элементы являются критическими для понимания устойчивости и изменения амплитуды колебаний.

Методы расчета. Сравнительный анализ методов – таких, как метод интегрирующего множителя и комплексный подход, показывает, что каждый из них имеет свои преимущества в зависимости от условий задачи. Поэтому выбор метода должен основываться на специфике исследуемого явления и необходимой точности расчетов.

Экспериментальная верификация. Необходимость подтверждения теоретических расчетов экспериментальными данными для более детального понимания специфики автоколебательных процессов.

Список использованных источников

1. Комаристая К.О. Особенности волновых процессов / К.О. Комаристая // Молодежь и наука: шаг к успеху: сборник научных статей 3-й Всероссийской научной конференции перспективных разработок молодых ученых, Курск, 21-22 марта 2019 года / Юго-Западный государственный университет, Московский политехнический университет. Том 3. Курск: Закрытое акционерное общество «Университетская книга», 2019. С. 163-167. EDN: DDMTBM

2. Чугунов В.А. Точные и приближенные решения одномерных уравнений «мелкой воды» и их физическая интерпретация // Информационные технологии и математическое моделирование в экономике, технике, экологии, образовании, педагогике и торговле. 2014. № 7. С. 135-154. EDN: TNAFDJ

3. Костюк В.И. Методы малых параметров в теории дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1975.

4. Губарев А.Н. Методы анализа и синтеза систем с малыми параметрами. Санкт-Петербург: Питер, 2000.

5. Keller H.B. Numerical Methods for Two-Point Boundary Value Problems. New York: Springer, 1987.

6. Vasilev V.V., Kolesnikov A.V. Asymptotic Methods in Analysis. London: Cambridge University Press, 2010.

7. Ландау Л.Д. Квантовая механика: Ненормальные задачи / Л.Д. Ландау, Е.М. Лифшиц. М.: Наука, 1989.

8. Mahan G.D. Many-Particle Physics, New York: Plenum Press, 2000.

9. Смирнов М.А. Вращательная зависимость резонансов типа Кориолиса т Ферми в малых линейных молекулах // Научно-технический вестник информационных технологий, механики и оптики, 2012, № 6 (82). С. 24-30

References

1. Komaristaya K.O. Features of wave processes / K.O. Komaristaya // Youth and science: a step towards success: collection of scientific articles of the 3rd All-Russian Scientific Conference of Promising developments of young Scientists, Kursk, March 21-22, 2019 / Southwestern State University, Moscow Polytechnic University. Volume 3. Kursk: Closed Joint Stock Company "University Book", 2019. P. 163-167. EDN: DDMTBM

2. Chugunov V.A. Exact and approximate solutions of one-dimensional shallow water equations and their physical interpretation / V.A. Chugunov // Information technologies and mathematical modeling in economics, technology, ecology, education, pedagogy and trade. 2014. No. 7. P. 135-154. EDN: TNAFDJ

3. Kostyuk V.I. Methods of small parameters in the theory of differential equations. Moscow: Nauka, 1975.

4. Gubarev A.N. Methods of analysis and synthesis of systems with small parameters. St. Petersburg: Peter, 2000.

5. Keller H.B. Numerical Methods for Two-Point Boundary Value Problems. New York: Springer, 1987.

6. Vasilev V.V., Kolesnikov A.V. Asymptotic Methods in Analysis. London: Cambridge University Press, 2010.

7. Landau L.D., Lifshits E.M. Quantum Mechanics: Abnormal Problems /. L.D. Landau, E.M. Lifshits. Moscow: Nauka, 1989.

8. Mahan G.D. Many-Particle Physics, New York: Plenum Press, 2000.

9. Smirnov M.A. Rotational dependence of Coriolis type resonances Fermi t in small linear molecules // Scientific and Technical Bulletin of Information Technologies, Mechanics and Optics, 2012, No. 6 (82). P. 24-30

10. Гринберг Я.С. Квантовые колебания в системах Ферми / Я.С. Гринберг, Костюков В.Н. // Физика твердого тела, том 48, № 5, 2006, с. 825-830. DOI: 10.1134/S1063783406050058.

11. Костюков В.Н. Квантовая механика и статистическая физика. М.: Физматлит, 2003.

12. Фартуков В.А. Асимптотический метод расчета параметров водного потока при сопряжении бьефов гидротехнических сооружений / В.А. Фартуков, М.В. Землянникова // Природообустройство. 2019. № 2. С. 96-99. DOI: 10.34677/1997-6011/2019-2-96-100

13. Землянникова М.В. Качественная оценка динамической системы нелинейных колебаний прыжкового сопряжения бьефов. // В сборнике: Роль природообустройства в обеспечении устойчивого функционирования и развития экосистем. Материалы международной научно-практической конференции. 2006. / В.А. Фартуков, М.В. Землянникова. М.: МГУП, 2006. С. 398-401.

10. Grinberg Ya.S. "Quantum oscillations in Fermi systems." / Ya.S. Grinberg, V.N. Kostyukov // Solid State Physics, vol. 48, No. 5, 2006, P. 825-830. DOI: 10.1134/S1063783406050058.

11. Kostyukov V.N. Quantum mechanics and statistical Physics. Moscow: Fizmatlit, 2003.

12. Fartukov V.A. An asymptotic method for calculating water flow parameters when coupling streams of hydraulic structures / V.A. Fartukov, M.V. Zemlyannikova // Prirodoobustreojstvo. 2019. No. 2. P. 96-99. DOI: 10.34677/1997-6011/2019-2-96-100

13. Zemlyannikova M.V. Qualitative assessment of the dynamic system of nonlinear oscillations of the jump coupling of streams / M.V. Zemlyannikova, V.A. Fartukov // In the collection: The role of environmental management in ensuring the sustainable functioning and development of ecosystems. Materials of the international scientific and practical conference. 2006. Moscow: MGUP, 2006. P. 398-401.

Об авторах

Василий Александрович Фартуков, канд. техн. наук, доцент кафедры «Гидротехнические сооружения»; Scopus AuthorID: 57494508400; ORCID: 0000-0003-2852-7210; SPIN-код: 5656-7629; AuthorID: 1002745; vasfar@mail.ru

Марина Ильинична Зборовская, канд. техн. наук, доцент кафедры «Гидротехнические сооружения»; WoS Researcher ID: AAE-2570-2022; Scopus AuthorID: 57219607364; ORCID: 0000-0002-8405-8757; SPIN-код: 6748-0927; AuthorID: 326001; moo_abh@mail.ru, zborovskya@rgau-msha.ru

About the authors

Vasily A. Fartukov, CSc (Eng), associate professor of the department "Hydro technical structures": vasfar@mail.ru; Scopus AuthorID: 57494508400; ORCID: 0000-0003-2852-7210; SPIN-code: 5656-7629; AuthorID: 1002745

Marina I. Zborovskaya, CSc (Eng), associate professor of the department "Hydro technical structures": zborovskya@rgau-msha.ru; WoS ResearcherID: AAE-2570-2022; Scopus AuthorID: 57219607364; ORCID: 0000-0002-8405-8757; SPIN-code: 6748-0927; AuthorID: 326001; moo_abh@mail.ru

Критерии авторства / Authorship criteria

Фартуков В.А., Зборовская М.И. выполнили теоретические исследования, на основании которых провели обобщение и написали рукопись, имеют на статью авторское право и несут ответственность за плагиат.

Fartukov V.A., Zborovskaya M.I. performed theoretical research, on the basis of which they generalized and wrote a manuscript, they have copyright on the article and are responsible for plagiarism.

Конфликт интересов / Conflict of interests

Авторы заявляют об отсутствии конфликтов интересов / The authors declare that there are no conflicts of interests

Вклад авторов / Contribution of authors

Все авторы сделали равный вклад в подготовку публикации / All authors made an equal contribution to the preparation of the publicati

Поступила в редакцию / Received at the editorial office 12.02.2025

Одобрена после рецензирования и доработки / Received after review and revision 15.04.2025

Принята к публикации / Accepted for publication 15.04.2025